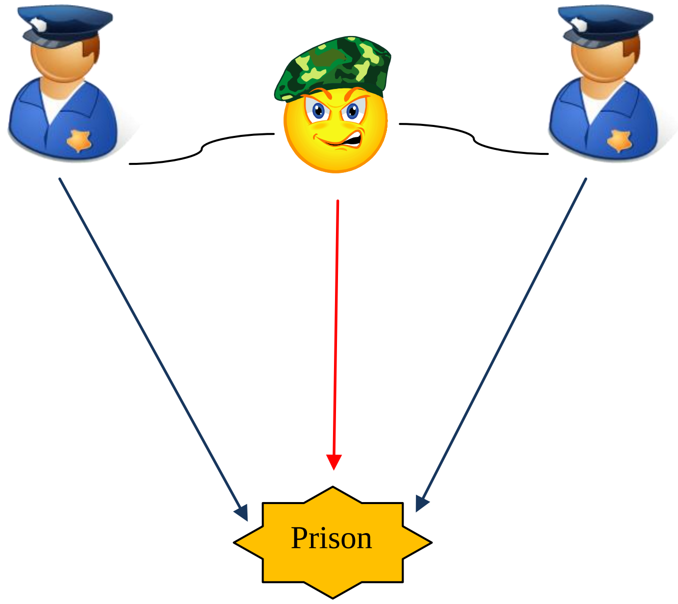
Ce paragraphe de cours est un complément des propriétés vues en 3ère Année secondaire.

Imaginons :

Deux Gendarmes tiennent en main un prisonnier.
Les deux gendarmes se dirigent vers la prison.
Le prisonnier sera mis, Sans aucun doute, en prison.



Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement

$\lim\limits_{x\to a}$ désigne la limite en a réel fini ou en $+\infty$ ou en $-\infty$ à droite en a ou à gauche en a.

ℓ désigne un réel fini.

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I (un voisinage de a).

Si pour tout x de I, $g(x) \le f(x) \le h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$,

alors, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exemple : Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

Pour tout x réel , $-1 \le \cos x \le 1$

D'où, pour toux x de $]0,+\infty[$, on a : $-\dfrac{1}{x} \le \cos x \le \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'autre part, pour toux x de $]-\infty,0[$, on a : $\dfrac{1}{x} \le \cos x \le -\dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} (-\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Corollaire

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I (un voisinage de a).

Si pour tout x de I, $|f(x) - \ell| \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Exemple : Soit $f(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^*$. Calculons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(x) - 1 = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

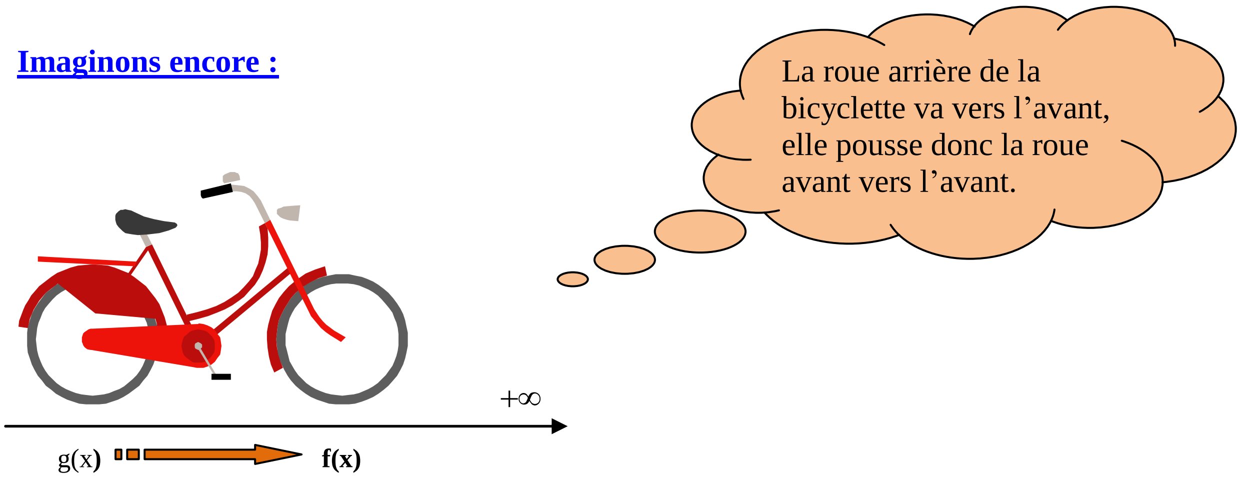
On e déduit que, pour toux *x* de $\mathbb{R}^*$, on a : $|f(x) - 1| = x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$.

Or , pour toux *x* de $\mathbb{R}^*$, $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$ donc $x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2$.

Il en résulte que, pour toux *x* de $\mathbb{R}^*$, $|f(x) - 1| \le x^2$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Imaginons encore :



Théorème

$\lim\limits_{x\to a}$ désigne la limite en a réel fini ou en $+\infty$ ou en $-\infty$ à droite en a ou à gauche en a.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I (un voisinage de a).

- Si pour tout x de I, $f(x) \ge g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de I, $f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple : Soit $f(x) = x - \sin x$, calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x - \sin x$.

- ✓ Pour toux *x* réel, on a : $-1 \le -\sin x$, donc $x - 1 \le x - \sin x$.
  Or $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - 1) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
- ✓ Pour tout x réel, on a : $-\sin x \le 1$, donc $x - \sin x \le x + 1$.
  Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} x + 1 = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.